Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 33, No. 1, 2015, pág. 27–39

Sobre los continuos tipo θ y θ_n

Sergio Macías*

Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, México D.F., México.
University of Birmingham, School of Mathematics and Statistics, Birmingham, United Kingdom.

Resumen. En 1974 el Profesor R. W. FitzGerald definió los continuos tipo θ y θ_n. (Un continuo X es un continuo *tipo* θ (*tipo* θ_n, para algún número natural n) si para cada subcontinuo K de X, resulta que $X \setminus K$ sólo tiene un número finito de componentes ($X \setminus K$ tiene a lo más n componentes).) Los profesores E. E. Grace y E. J. Vought continuaron el estudio de estas clases de continuos, cuando tales continuos admiten una descomposición monótona semicontinua superiormente cuyo cociente es una gráfica. El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las propiedades de los continuos tipo θ y θ_n, principalmente cuando la descomposición mencionada anteriormente es continua [14].
Palabras clave: Continuo débilmente irreducible, continuo continuamente irreducible, continuo irreducible, continuo tipo θ, continuo tipo θ_n, descomposición continua, función $\mathcal{T}$ de Jones, hiperespacio, productos simétricos, subconjunto Z.
MSC2010: 54B20, 54C60.

On Type θ and θ_n continua

Abstract. In 1974 Professor R. W. FitzGerald defined type θ and θ_n continua. (A continuum X is of *type* θ (*type* θ_n, for some positive integer n) if for each subcontinuum K of X, we have that $X \setminus K$ has only a finite number of components ($X \setminus K$ has at most n components).) Professors E. E. Grace and E. J. Vought continued the study of these clases of continua, when such continua admit an upper semicontinuous monotone decomposition whose quotient space is a graph. The purpose of this work is to present some of the properties of type θ and θ_n continua, mainly when the decomposition is continuous [14].
Keywords: Continuous decomposition, continuously irreducible continuum, hyperspace, idempotency, Jones' set function $\mathcal{T}$, irreducible continuum, symmetric products, type θ continuum, type θ_n continuum, type A' θ-continuum, weakly irreducible continuum, Z-set.

* Email: sergiom@matem.unam.mx; s.macias@bham.ac.uk
Recibido: 26 de septiembre de 2014, Aceptado: 20 de enero de 2015.
Para citar este artículo: S. Macías, Sobre los continuos tipo θ y θ_n, *Rev. Integr. Temas Mat.* 33 (2015), no. 1, 27-39.

1. Introducción

El Profesor R. W. FitzGerald definió los continuos tipo θ y θ_n en [4]. Los profesores E. E. Grace y E. J. Vought continuaron su estudio, cuando tales continuos admiten una descomposición monótona semicontinua superiormente cuyo cociente es una gráfica ([5], [6], [7], [8], [21] y [22]). El propósito de este artículo es presentar algunas de las propiedades de los continuos tipo θ y θ_n, principalmente cuando la descomposición mencionada anteriormente es continua.

El artículo consta de seis secciones. Después de esta introducción y de la sección de definiciones, en la tercera sección enunciamos los principales resultados sobre continuos tipo θ (θ_n) obtenidos en el pasado. En la cuarta sección presentamos algunos resultados sobre la función $\mathcal{T}$ del profesor Jones que serán de utilidad posteriormente. En la quinta sección damos los resultados sobre los continuos tipo θ continuamente del tipo A'; en particular, probamos que para que un continuo X de tipo θ del tipo A sea continuamente del tipo A' es necesario y suficiente que la función $\mathcal{T}_X$ sea continua. Además, mostramos que si X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A', entonces X es un continuo tipo θ_n, para algún número natural n. En la sexta sección, nos concentramos en los hiperespacios de los continuos tipo θ continuamente del tipo A', demostramos que el n-ésimo producto simétrico de un continuo tipo θ continuamente del tipo A', para el cual todos los elementos de la descomposición son no degenerados, es un subconjunto Z tanto del hiperespacio de subconjuntos cerrados del continuo como del n-ésimo hiperespacio del continuo. También se prueba que si X es un continuo continuamente irreducible, que no es un arco, entonces su hiperespacio de subcontinuos es localmente una 2-celda en la cima.

2. Definiciones

Sean Z un espacio métrico y A un subconjunto de Z. Entonces $Int_Z(A)$ y $Cl_Z(A)$ denotan el interior y la cerradura de A en Z.

Dado un espacio métrico Z, $\mathcal{P}(Z)$ representa al *conjunto potencia* (o *conjunto de partes*) de Z. Una *descomposición* de Z es una familia $\mathcal{G}$ de subconjuntos no vacíos y mutuamente disyuntos de Z tal que $Z = \bigcup \mathcal{G}$. Diremos que $\mathcal{G}$ es *semicontinua superiormente* si la función cociente $q\colon Z \twoheadrightarrow Z/\mathcal{G}$ es cerrada. La descomposición es *continua* si la función cociente es tanto abierta como cerrada. Para mayor información, se puede consultar la segunda sección del primer capítulo de [10].

Sea Y un espacio métrico. Decimos que un subconjunto cerrado A de Y es un *subconjunto* Z de Y si para cada $\varepsilon > 0$, existe una función continua $f\colon Y \to Y \setminus A$ tal que $d(y, f(y)) < \varepsilon$, para toda $y \in Y$.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Diremos que X es *hereditariamente descomponible* siempre que todos sus subcontinuos no degenerados sean descomponibles. El continuo X es *indescomponible* si no es descomponible. Un continuo es *débilmente irreducible* siempre que el complemento de la unión de una familia finita de subcontinuos sólo tenga un número finito de componentes [1]. Un subcontinuo Y de un continuo X es *terminal* si para todo subcontinuo K de X tal que $Y \cap K \neq \emptyset$, se tiene que $Y \subset K$ o $K \subset Y$.

Una *gráfica* es un continuo que se puede escribir como una unión finita de arcos tales que su intersección es vacía o sólo se intersecan en uno o en ambos puntos extremos.

Un subconjunto A de un continuo X es *denso en ninguna parte* si $Int_X(Cl_X(A)) = \emptyset$.

Decimos que un continuo X es *tipo θ* si para todo subcontinuo K de X, se tiene que $X \setminus K$ sólo tiene un número finito de componentes. Dado un número natural n, decimos que X es *tipo θ_n* si para todo subcontinuo K de X, resulta que $X \setminus K$ tiene a lo más n componentes.

Siguiendo al profesor Vought [21], diremos que un continuo X tipo θ (tipo θ_n) es del *tipo A* si X admite una descomposición monótona semicontinua superiormente $\mathcal{D}$ cuyo espacio cociente es una gráfica; y es del *tipo A'* si es del tipo A y, además, los elementos de la descomposición $\mathcal{D}$ tienen interior vacío. Un continuo tipo θ (θ_n) del tipo A' para el cual la descomposición $\mathcal{D}$ es continua, se llamará *continuo tipo θ (θ_n) continuamente del tipo A'*.

Un continuo X es *irreducible* si existen dos puntos p y q de X tales que para ningún subcontinuo propio Y de X se tiene que $\{p, q\} \subset Y$. Todo continuo irreducible es débilmente irreducible [10, 1.7.29]. Un continuo X es *tipo λ* si X es irreducible y admite una descomposición semicontinua superiormente $\mathcal{G}$ en subcontinuos densos en ninguna parte tal que $X/\mathcal{G}$ es un arco. Siguiendo a los profesores Mohler y Oversteegen [18], decimos que un continuo X de tipo λ para la cual la descomposición $\mathcal{G}$ es continua es un *continuo continuamente irreducible*. Se sigue de [20, Theorem 1] que todo continuo irreducible es un continuo tipo θ_2. De donde, todo continuo continuamente irreducible es un continuo tipo θ_2 continuamente del tipo A'.

Si X es un continuo, entonces consideraremos los siguientes *hiperespacios* de X:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\};$$

$$\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$$

y

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A 2^X se le conoce como el *hiperespacio de subconjuntos cerrados de X*. A $\mathcal{C}_n(X)$ se le llama el *n-ésimo hiperespacio de X*. Cuando $n = 1$, $\mathcal{C}_1(X)$ es el *hiperespacio de subcontinuos de X*. A $\mathcal{F}_n(X)$ se le conoce como el *n-ésimo producto simétrico de X*. A 2^X se le puede dar la topología de Vietoris [19, (0.11)] o la topología inducida por la métrica de Hausdorff, $\mathcal{H}$ [19, (0.1)]. Una base para la topología de Vietoris está dada por:

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_m\rangle \mid U_1, \ldots, U_m \text{ son subconjuntos abiertos de } X\},$$

donde:

$$\langle U_1, \ldots, U_m\rangle = \{A \in 2^X \mid A \subset \cup_{j=1}^m U_j \text{ y } A \cap U_j \neq \emptyset, \text{ para toda } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Para simplificar notación, $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle_n$ denota la intersección del conjunto abierto $\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$, de la topología de Vietoris, con $\mathcal{C}_n(X)$. Sean X y Y continuos. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces definimos las *funciones inducidas* $2^f\colon 2^X \to 2^Y$ y $\mathcal{C}_n(f)\colon \mathcal{C}_n(X) \to \mathcal{C}_n(Y)$ como $2^f(A) = f(A)$ y $\mathcal{C}_n(f)(A) = f(A)$, respectivamente. Notemos que 2^f y $\mathcal{C}_n(f)$ son funciones continuas [10, 1.8.22 y 1.8.23]. Más información sobre hiperespacios se encuentra en [10, 11].

Dado un continuo X, una *función de Whitney* para $\mathcal{C}_1(X)$ es una función continua $\mu\colon \mathcal{C}_1(X) \twoheadrightarrow [0,1]$ tal que $\mu(X) = 1$, $\mu(\{x\}) = 0$, para toda $x \in X$, y si A y B son dos elementos de $\mathcal{C}_1(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Si X es un continuo entonces $\mathcal{C}_1(X)$ es *localmente una 2-celda en la cima* si existe una 2-celda $\mathcal{E}$ en $\mathcal{C}_1(X)$ tal que $X \in Int_{\mathcal{C}_1(X)}(\mathcal{E})$.

Dado un continuo X, definimos la función $\mathcal{T}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ del profesor F. Burton Jones como sigue: Si A es un subconjunto de X, entonces

$$\mathcal{T}(A) = X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que}$$

$$x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A\}.$$

Escribiremos $\mathcal{T}_X$ cuando necesitemos referirnos al continuo X con el cual estamos trabajando. Observemos que $\mathcal{T}(A)$ siempre es un subconjunto cerrado de X. Un continuo X es *$\mathcal{T}$-simétrico* si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados A y B de X, se tiene que $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{T}(A) \cap B = \emptyset$. Diremos que X es *puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico* siempre que dados dos puntos p y q de X, se tenga que $q \in \mathcal{T}(\{p\})$ si y sólo si $p \in \mathcal{T}(\{q\})$. Además, X es *$\mathcal{T}$-aditivo* si $\mathcal{T}(A \cup B) = \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$, para cualesquiera dos subconjuntos cerrados A y B de X. Decimos que $\mathcal{T}$ es *idempotente* en el continuo X si $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(A)$ para todo subconjunto A de X. Más información sobre la función $\mathcal{T}$ se encuentra en el tercer capítulo de [10]. Notemos que $\mathcal{T}|_{2^X} : 2^X \to 2^X$; de esta forma podemos preguntarnos cuándo $\mathcal{T}|_{2^X}$ es continua. Diremos que X es un continuo para el cual la función $\mathcal{T}$ es continua si $\mathcal{T}|_{2^X}$ es una función continua.

Un continuo X es *aposindético* si $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$ para toda $x \in X$.

3. Primeros resultados

Aquí enunciaremos los principales resultados sobre continuos tipo θ (θ_n) obtenidos en el pasado.

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en [4, Theorem 3.4]

Teorema 3.1. *Sea X un continuo. Entonces X es un continuo tipo θ si y sólo si X es débilmente irreducible.*

El resultado que presentamos a continuación nos da una condición suficiente para que un continuo tipo θ sea del tipo A'; una demostración se encuentra en [4, Theorem 6.2].

Teorema 3.2. *Sea X un continuo tipo θ. Si k es un número natural tal que $\mathcal{T}^k(\{x\}) = \mathcal{T}^{k+1}(\{x\})$, para toda $x \in X$, entonces X admite una descomposición $\mathcal{D} = \{\mathcal{T}^k(\{x\}) \mid x \in X\}$ tal que $\mathcal{D}$ es la única descomposición minimal con respecto a ser monótona, semicontinua superiormente y teniendo como espacio cociente, $X/\mathcal{D}$, una gráfica.*

El siguiente teorema nos dice que en la clase de los continuos localmente conexos, todo continuo tipo θ es de θ_n para algún número natural n; una prueba se localiza en [4, Corollary 4.8].

Teorema 3.3. *Si X es un continuo localmente conexo de tipo θ, entonces X es de tipo θ_n, para algún número natural n.*

Como las gráficas son continuos localmente conexos, obtenemos:

Corolario 3.4. *Si D es una gráfica, entonces existe un número natural n tal que D es un continuo tipo θ_n.*

Uno podría pensar que el Teorema 3.3 es cierto para todos los continuos tipo θ; la profesora Jo Heath [9] construyó un continuo tipo θ que no es tipo θ_n para ningún número natural n.

El siguiente resultado da una caracterización para que los continuos tipo θ_n sean del tipo A'; una demostración se puede encontrar en [6, Theorem 2].

Teorema 3.5. *Sean n un número natural y X un continuo tipo θ_n. Entonces X es del tipo A' si y sólo si $Int_X(\mathcal{T}(H)) = \emptyset$, para cada subcontinuo H de X con interior vacío. Más aún, la descomposción, $\mathcal{D}$, está dada por $\mathcal{D} = \{\mathcal{T}^{2n}(\{x\}) \mid x \in X\}$.*

El teorema que ofrecemos a continuación nos dice que los continuos tipo θ tienen propiedades parecidas a las de las gráficas; una prueba de él se encuentra en [4, Theorem 5.1].

Teorema 3.6. *Si X es un continuo tipo θ y $\mathcal{G}$ es una colección de subcontinuos mutuamente disyuntos, entonces $X \setminus G$ tiene a lo más dos componentes para todos los elementos $G \in \mathcal{G}$, salvo, posiblemente, un número finito de ellos.*

4. La Función $\mathcal{T}$ de Jones

Aquí presentamos los resultados sobre la función $\mathcal{T}$ que serán útiles posteriormente.

Una función continua y suprayectiva entre continuos $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es *monótona* si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es conexo.

Lema 4.1. *Sean X y Y continuos, donde Y es aposindético. Si $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es una función monótona entonces $\mathcal{T}_X(\{x\}) \subset f^{-1}(f(x))$, para toda $x \in X$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $x' \in X \setminus f^{-1}(f(x))$. Esto implica que $f(x) \neq f(x')$. En consecuencia, como Y es aposindético, existe un subcontinuo W de Y tal que $f(x') \in Int_Y(W) \subset W \subset Y \setminus \{f(x)\}$. De donde resulta que $x' \in f^{-1}(f(x')) \subset Int_X(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(W) \subset X \setminus f^{-1}(f(x)) \subset X \setminus \{x\}$. Como f es monótona, $f^{-1}(W)$ es un subcontinuo de X [10, 2.1.12]. De lo anterior se sigue que $x' \in X \setminus \mathcal{T}_X(\{x\})$. Por tanto, $\mathcal{T}_X(\{x\}) \subset f^{-1}(f(x))$. ☑

Teorema 4.2. *Si X es un continuo débilmente irreducible, entonces X es $\mathcal{T}_X$-simétrico.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X y supongamos que $A \cap \mathcal{T}_X(B) = \emptyset$. Entonces para cada $a \in A$, existe un subcontinuo W_a de X tal que $a \in Int_X(W_a) \subset W_a \subset X \setminus B$. Como A es compacto, existe un número finito de elementos, $a_1, \ldots, a_n$ de A tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^n Int_X(W_{a_j}) \subset \bigcup_{j=1}^n W_{a_j} \subset X \setminus B$. Esto implica que $B \subset X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n W_{a_j}\right) \subset X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n Int_X(W_{a_j})\right) \subset X \setminus A$.

Sea $b \in B$. Como X es débilmente irreducible, $X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} W_{a_j}\right)$ sólo tiene un número finito de componentes, las cuales son subconjuntos abiertos de X. Sea C la componente de $X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} W_{a_j}\right)$ que tiene a b. Entonces $b \in C \subset Cl_X(C) \subset X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} Int_X(W_{a_j})\right) \subset X \setminus A$. En consecuencia, $b \in X \setminus \mathcal{T}_X(A)$. De donde, $B \cap \mathcal{T}_X(A) = \emptyset$. Por tanto, X es $\mathcal{T}_X$-simétrico. ☑

Teorema 4.3. *Un continuo es $\mathcal{T}$-simétrico si y sólo si es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico y $\mathcal{T}$-aditivo.*

Demostración. Sean X un continuo $\mathcal{T}_X$-simétrico y A y B dos subconjuntos cerrados de X. De la definición, se tiene que $\mathcal{T}_X(A) \cup \mathcal{T}_X(B) \subset \mathcal{T}_X(A \cup B)$. Sea $x \in \mathcal{T}_X(A \cup B)$. Entonces $\{x\} \cap \mathcal{T}_X(A \cup B) \neq \emptyset$. Como X es $\mathcal{T}_X$-simétrico, se tiene que $\mathcal{T}_X(\{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. En consecuencia, resulta que $\mathcal{T}_X(\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ o $\mathcal{T}_X(\{x\}) \cap B \neq \emptyset$. Otra vez, como X es $\mathcal{T}_X$-simétrico, $\{x\} \cap \mathcal{T}_X(A) \neq \emptyset$ o $\{x\} \cap \mathcal{T}_X(B) \neq \emptyset$; i.e., $x \in \mathcal{T}_X(A)$ o $x \in \mathcal{T}_X(B)$. De donde, $x \in \mathcal{T}_X(A) \cup \mathcal{T}_X(B)$. Por tanto, $\mathcal{T}_X(A \cup B) \subset \mathcal{T}_X(A) \cup \mathcal{T}_X(B)$ y X es $\mathcal{T}_X$-aditivo. Claramente, todo continuo $\mathcal{T}_X$-simétrico es puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico.

Supongamos que X es puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico y $\mathcal{T}_X$-aditivo. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X y supongamos que $B \cap \mathcal{T}_X(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap \mathcal{T}_X(A)$. Entonces $x \in B$ y $x \in \mathcal{T}_X(A)$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cap B \subset A \cap \mathcal{T}_X(B)$, lo que implica que $A \cap \mathcal{T}_X(B) \neq \emptyset$. Supongamos que $x \in B \setminus A$. Como X es $\mathcal{T}_X$-aditivo, se tiene que $\mathcal{T}_X(A) = \bigcup\{\mathcal{T}_X(\{a\}) \mid a \in A\}$ [10, 3.1.46]. Así que existe $a \in A$ tal que $x \in \mathcal{T}_X(\{a\})$. Como X es puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico, resulta que $a \in \mathcal{T}_X(\{x\})$. De donde, como $x \in B$, $a \in \mathcal{T}_X(\{x\}) \subset \mathcal{T}_X(B)$. Por tanto, $a \in A \cap \mathcal{T}_X(B)$ y $A \cap \mathcal{T}_X(B) \neq \emptyset$. ☑

Como consecuencia de los Teoremas 4.2 y 4.3, obtenemos que:

Corolario 4.4. *Todo continuo débilmente irreducible es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico y $\mathcal{T}$-aditivo.*

Teorema 4.5. *Todo continuo tipo θ es puntualmente $\mathcal{T}$-simétrico y $\mathcal{T}$-aditivo.*

Demostración. Sea X un continuo. Si X es tipo θ, entonces X es débilmente irreducible, por el Teorema 3.1. De donde, por el Corolario 4.4, se tiene que X es puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico y $\mathcal{T}_X$-aditivo. ☑

El resultado que presentamos a continuación nos da una condición suficiente para que la función $\mathcal{T}$ sea continua; una demostración de él está en [10, 3.2.2].

Teorema 4.6. *Sean X y Y continuos, donde Y es localmente conexo. Si $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva, monótona y abierta tal que para cada subcontinuo K de X, $f(K) \neq Y$, entonces $\mathcal{T}_X$ es continua.*

Una prueba del siguiente resultado se encuentra en [12, Theorem 3.8].

Teorema 4.7. *Sea X un continuo puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico para el cual la función $\mathcal{T}_X$ es continua. Entonces*

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$$

es una descomposición continua de X tal que $X/\mathcal{G}$ es un continuo localmente conexo y $\mathcal{T}_X\left(2^X\right)$ es homeomorfo a $2^{X/\mathcal{G}}$. Más aún, todos los elementos de $\mathcal{G}$ son densos en ninguna parte en X y existe un subconjunto G_δ denso, $\mathcal{W}$, de $X/\mathcal{G}$ tal que si $q(x) \in \mathcal{W}$, entonces $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es un continuo indescomponible, donde $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es la función cociente.

Con la $\mathcal{T}$-aditividad se requiere "poco" para obtener la continuidad de la función $\mathcal{T}$. Una demostración de este hecho se encuentra en [3, Corollary 6.5]

Lema 4.8. *Si X es un continuo $\mathcal{T}$-additivo y $\mathcal{T}|_{\mathcal{F}_1(X)}$ es continua, entonces $\mathcal{T}$ es continua.*

Teorema 4.9. *Si X es un continuo tipo θ_1, entonces*

$$\mathcal{T}_X(A) = \bigcap\{W \mid W \text{ es un subcontinuo de } X \text{ tal que } A \subset Int_X(W)\},$$

para todo subconjunto A[1] de X.

Demostración. Sean A un subconjunto de X y $x \in X \setminus \mathcal{T}_X(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A$. Como X es un continuo tipo θ_1, se tiene que $X \setminus W$ es conexo y que $A \subset X \setminus W \subset Cl_X(X \setminus W) \subset X \setminus \{x\}$. Esto implica que $x \in X \setminus \bigcap\{W \mid W$ es un subcontinuo de X tal que $A \subset Int_X(W)\}$.

Supongamos que $x \in X \setminus \bigcap\{W \mid W$ es un subcontinuo de X tal que $A \subset Int_X(W)\}$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $A \subset Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{x\}$. Como X es un continuo tipo θ_1, resulta que $X \setminus W$ es conexo y que $x \in X \setminus W \subset Cl_X(X \setminus W) \subset X \setminus A$. De donde obtenemos que $x \in X \setminus \mathcal{T}_X(A)$. Por tanto, $\mathcal{T}_X(A) = \bigcap\{W \mid W$ es un subcontinuo de X tal que $A \subset Int_X(W)\}$. ☑

5. Continuos tipo θ continuamente del tipo A'

Lema 5.1. *Sean X un continuo tipo θ continuamente del tipo A' y $q\colon X \twoheadrightarrow D$ la función cociente, donde D es una gráfica. Si K es un subcontinuo propio de X, entonces $q(K) \neq D$.*

Demostración. Sea K un subcontinuo propio de X. Si $Int_X(K) = \emptyset$, entonces, como q es una función abierta y D es una gráfica, $q(K)$ es un subcontinuo degenerado de D. En consecuencia, $q(K) \neq D$.

Supongamos que $Int_X(K) \neq \emptyset$. Como X es un continuo tipo θ, $X \setminus K$ tiene sólo un número finito de componentes, digamos $C_1, \ldots, C_\ell$. Notemos que para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, C_j es un subconjunto abierto de X [10, 1.6.2]. En consecuencia, $X = K \cup C_1 \cup \cdots \cup C_\ell$. Esto implica que $D = q(X) = q(K \cup C_1 \cup \cdots \cup C_\ell) = q(K) \cup q(C_1) \cup \cdots \cup q(C_\ell)$. Como q es abierta, $q(C_1), \ldots, q(C_\ell)$ son subconjuntos abiertos de D. Por tanto, $q(K) \neq D$. ☑

[1]La función $\mathcal{K}_X\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ del profesor F. Burton Jones se define como $\mathcal{K}_X(A) = \bigcap\{W \mid W$ es un subcontinuo de X tal que $A \subset Int_X(W)\}$. Entonces este teorema nos dice que para los continuos de tipo θ_1, $\mathcal{T}_X = \mathcal{K}_X$

Teorema 5.2. *Sea X un continuo tipo θ del tipo A. Entonces X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A' si y sólo si $\mathcal{T}_X$ es continua. Más aún, $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$ es la descomposición monótona más fina de X, cuyos elementos son densos en ninguna parte, tal que $X/\mathcal{G}$ es una gráfica.*

Demostración. Como X es un continuo tipo θ del tipo A, existe una descomposición semicontinua superiormente $\mathcal{D}$ en subcontinuos de X tal que $X/\mathcal{D}$ es una gráfica. Sea $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{D}$ la función cociente y notemos que es continua.

Supongamos que X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A'. Observemos que q es monótona y abierta. Además, por el Lema 5.1, para cada subcontinuo K de X, $q(K) \neq D$. De donde, por el Teorema 4.6, $\mathcal{T}_X$ es continua.

Supongamos que $\mathcal{T}_X$ es continua. Como X es puntualmente $\mathcal{T}_X$-simétrico (Teorema 4.5), se tiene que $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$ es una descomposición continua de X tal que $X/\mathcal{G}$ es un continuo localmente conexo (Teorema 4.7). Sea $x \in X$. Entonces, por el Lema 4.1, $\mathcal{T}_X(\{x\}) \subset q^{-1}(q(x))$. Sean $z \in q^{-1}(q(x))$ y W un subcontinuo de X tal que $z \in Int_X(W)$. Como $X/\mathcal{D}$ es una gráfica y $z \in Int_X(W)$, por [6, Lemma 1], se tiene que $q^{-1}(q(z)) = q^{-1}(q(x)) \subset W$. De donde, $x \in W$ y $z \in \mathcal{T}_X(\{x\})$. Por tanto, $\mathcal{T}_X(\{x\}) = q^{-1}(q(x))$. Así, $\mathcal{G} = \{q^{-1}(q(x)) \mid x \in X\}$ y X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A'. El hecho de que $\mathcal{G}$ es la descomposición más fina se sigue del Lema 4.1. ☑

Corolario 5.3. *Si X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A', que no es una gráfica, entonces X no es hereditariamente descomponible.*

Demostración. Sea X un continuo tipo θ continuamente del tipo A', que no es una gráfica. Por el Teorema 5.2, $\mathcal{T}_X$ es continua y $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$ es una descomposición continua tal que $X/\mathcal{G}$ es una gráfica. Por el Teorema 4.7, muchos elementos de $\mathcal{G}$ son subcontinuos indescomponibles de X. ☑

Una función continua y suprayectiva entre continuos $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es *atómica* si para cada subcontinuo K de X tal que $f(K)$ es no degenerado, resulta que $K = f^{-1}(f(K))$.

Teorema 5.4. *Sea X un continuo tipo θ continuamente del tipo A', que no es una gráfica. Si $q\colon X \twoheadrightarrow D$ es la función cociente, entonces q es atómica.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de X tal que $q(K)$ es no degenerado. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $K \neq X$. Claramente, $K \subset q^{-1}(q(K))$. Sea $x_0 \in q^{-1}(q(K))$. Por el Teorema 5.2, para cada $x \in X$, $q^{-1}(q(x)) = \mathcal{T}_X(\{x\})$. Entonces, por [12, Lemma 3.2], tenemos que $\mathcal{T}_X(\{x\}) = q^{-1}(q(x)) \subset K$, para toda $x \in Int_X(K)$. Como D es una gráfica, existe una sucesión $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ de puntos de $q(Int_X(K))$ que converge a $q(x_0)$. Como q^{-1} es continua [10, 1.8.24], para cada m, existe $x_m \in q^{-1}(t_m)$ tal que la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a x_0. Como K es cerrado y $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset K$, resulta que $x_0 \in K$. De donde, $q^{-1}(q(K)) \subset K$. Por tanto, q es una función atómica. ☑

Corolario 5.5. *Sea X un continuo tipo θ continuamente del tipo A', que no es una gráfica. Si $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$, entonces $\mathcal{G}$ es la descomposición monótona más fina de X de tal forma que $X/\mathcal{G}$ es una gráfica y $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es un subcontinuo terminal de X, para toda $x \in X$.*

Demostración. Como X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A', existe una descomposición continua $\mathcal{D}$ en subcontinuos densos en ninguna parte de X tal que $X/\mathcal{D}$ es una gráfica. Sea $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{D}$ la función cociente. Por el Teorema 5.4, q es una función atómica. De donde, por [17, (1.2)], las fibras de q son subcontinuos terminales de X. Por el Teorema 5.2, para cada $x \in X$, $q^{-1}(q(x)) = \mathcal{T}_X(\{x\})$. De donde, $\mathcal{D} = \mathcal{G}$ y cada $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es un subcontinuo terminal de X. El hecho de que $\mathcal{G}$ es la descomposición monótona más fina de X se sigue del Teorema 5.2. ☑

Corolario 5.6. *Sea X un continuo tipo θ continuamente del tipo A', que no es una gráfica. Si K es un subcontinuo de X tal que $K = \mathcal{T}_X(\{x_0\})$, para alguna $x_0 \in X$ o $K \not\subset \mathcal{T}_X(\{x\})$, para ninguna $x \in X$, entonces $\mathcal{T}_X(K) = K$.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de X. Supongamos que $K = \mathcal{T}_X(\{x_0\})$, para alguna $x_0 \in X$. Como $\mathcal{T}_X$ es continua (Teorema 5.2), $\mathcal{T}_X$ es idempotente [10, 3.2.8]. En consecuencia, $\mathcal{T}_X(K) = \mathcal{T}_X(\mathcal{T}_X(\{x_0\})) = \mathcal{T}_X(\{x_0\}) = K$.

Supongamos que $K \not\subset \mathcal{T}_X(\{x\})$, para ninguna $x \in X$. Entonces, por el Teorema 5.5, $\mathcal{T}_X(\{x\}) \subset K$ para toda $x \in K$. Lo que implica que $K = \bigcup\{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in K\}$. Por otra parte, como X es $\mathcal{T}_X$-aditivo (Teorema 4.3), resulta que $\mathcal{T}_X(K) = \bigcup\{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in K\} = K$ [10, 3.1.46]. ☑

Corolario 5.7. *Si X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A', entonces existe un número natural n tal que X es un continuo tipo θ_n.*

Demostración. Como X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A', existe una descomposición continua $\mathcal{D}$ en subcontinuos densos en ninguna parte de X tal que $X/\mathcal{D}$ es una gráfica. Por el Teorema 5.2, sabemos que $\mathcal{D} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$. Sea $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{D}$ la función cociente. Por el Corolario 3.4, existe un número natural n tal que $X/\mathcal{D}$ es un continuo tipo θ_n. Veremos que X es un continuo tipo θ_n.

Sea K un subcontinuo de X. Si $q(K)$ es no degenerado, como q es atómica, se tiene que $K = q^{-1}(q(K))$, de donde $X \setminus K$ y $X/\mathcal{D} \setminus q(K)$ tienen la misma cantidad de componentes. Así que $X \setminus K$ tiene a lo más n componentes. Si $K \subset \mathcal{T}_X(\{x_0\})$, para alguna $x_0 \in X$, como $\mathcal{T}_X(\{x_0\})$ es denso en ninguna parte y $\mathcal{D}$ es continua, entonces $X \setminus K$ tiene el mismo número de componentes que $X \setminus \mathcal{T}_X(\{x_0\})$. Como $\mathcal{T}_X(\{x_0\}) = q^{-1}(q(x_0))$, $X \setminus \mathcal{T}_X(\{x_0\})$ tiene el mismo número de componentes que $X/\mathcal{D} \setminus \{q(x_0)\}$. De donde, $X \setminus K$ tiene a lo más n componentes. Por tanto, X es un continuo tipo θ_n. ☑

6. Hiperespacios

Teorema 6.1. *Sean X un continuo tal que $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$ es una descomposición continua y terminal de X, $\mu\colon \mathcal{C}_1(X) \twoheadrightarrow [0,1]$ una función de Whitney tal que $\mu(\mathcal{T}_X(\{x\})) = t_0$, para toda $x \in X$ y algún $t_0 \in (0,1)$. Sean $t \in (0, t_0)$ y, para cada $x \in X$, $\mathcal{G}_x(t) = \{A \in \mu^{-1}(t) \mid A \subset \mathcal{T}_X(\{x\})\}$. Entonces $\mathfrak{G}_t = \{\mathcal{G}_x(t) \mid x \in X\}$ es una descomposición continua y monótona de $\mu^{-1}(t)$ tal que $\mu^{-1}(t)/\mathfrak{G}_t$ es homeomorfo a $X/\mathcal{G}$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Notemos que $\mathcal{G}_x(t) = \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{C}_1(\mathcal{T}_X(\{x\}))$. En consecuencia, $\mathcal{G}_x(t)$ es un continuo [2, (1.4)]. Como $\mathcal{G}$ es una descomposición de X y cada

$\mathcal{G}_x(t)$ es un continuo, se tiene que $\mathfrak{G}_t$ es una descomposición de $\mu^{-1}(t)$. Veremos que $\mathfrak{G}_t$ es continua. Sean $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ la función cociente y $h_t\colon \mu^{-1}(t) \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ dada por $h_t = r \circ \mathcal{C}_1(q)|_{\mu^{-1}(t)}$, donde $r\colon \mathcal{F}_1(X/\mathcal{G}) \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es la isometría natural definida como $r(\{\chi\}) = \chi$. Observemos que h_t es continua y suprayectiva. Además, para cada $\chi \in X/\mathcal{G}$, existe $x \in X$ tal que $h_t^{-1}(\chi) = \mathcal{G}_x(t)$. Lo que implica que h_t es monótona. Para ver que h_t es abierta, basta mostrar que $\mathcal{C}_1(q)|_{\mu^{-1}(t)}$ es abierta. Notemos que $\mathcal{C}_1(q) \circ \Im = 1_{\mathcal{C}_1(X/\mathcal{G})}$, donde $\Im\colon \mathcal{C}_1(X/\mathcal{G}) \to \mathcal{C}_1(X)$ está dada por $\Im(A) = q^{-1}(A)$. Observemos que, como q es monótona, $\Im$ está bien definida y, como q es abierta, $\Im$ es continua [10, 1.8.24]. Como las funciones abiertas tienen la propiedad del factor [16, (5.15)], se tiene que $\mathcal{C}_1(q)$ es abierta. Sea $\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1$ un subconjunto abierto de $\mathcal{C}_1(X)$ tal que $\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1 \subset \mu^{-1}([0, t_0))$ y $\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1 \cap \mu^{-1}(t) \neq \emptyset$. Probaremos que $\mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1) = \mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1 \cap \mu^{-1}(t))$. Claramente, $\mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1 \cap \mu^{-1}(t)) \subset \mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1)$. Sea $A \in \langle U_1, \dots, U_n\rangle_1$. Como A es un subcontinuo de X, $\mu(A) < t_0$ y $\mathcal{G}$ es una descomposición terminal de X, existe $x \in X$ tal que $A \subset \mathcal{T}_X(\{x\})$. Sea $B \in \mathcal{G}_x(t)$. Entonces $\mathcal{C}_1(q)(A) = \mathcal{C}_1(q)(B) = \mathcal{C}_1(q)(\mathcal{T}_X(\{x\}))$. De lo anterior se obtiene que $\mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1) \subset \mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1 \cap \mu^{-1}(t))$. En consecuencia, $\mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1) = \mathcal{C}_1(q)(\langle U_1, \dots, U_n\rangle_1 \cap \mu^{-1}(t))$. Por tanto, $\mathcal{C}_1(q)|_{\mu^{-1}(t)}$ es abierta y h_t también lo es. Así, obtenemos que $\mathfrak{G}_t$ es una descomposición continua de $\mu^{-1}(t)$. El hecho de que $\mu^{-1}(t)/\mathfrak{G}_t$ es homeomorfo a $X/\mathcal{G}$ se sigue de [10, 1.2.10]. ☑

Teorema 6.2. *Si X es un continuo tipo θ continuamente del tipo A' tal que para toda $x \in X$, $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es no degenerado, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es un subconjunto Z tanto de 2^X como de $\mathcal{C}_n(X)$ para cualquier número natural n.*

Demostración. Como para toda $x \in X$, $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es no degenerado, dada $t_0 \in (0, 1)$, por [23, Theorem 3.1], existe una función de Whitney $\mu\colon \mathcal{C}_1(X) \twoheadrightarrow [0, 1]$ tal que $\mu(\mathcal{T}_X(\{x\})) = t_0$ para cada $x \in X$. Para cada $t \in (0, t_0)$, definimos $g_t\colon \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{C}_1(\mathcal{C}_1(X))$ como $g_t(\{x\}) = \mathcal{G}_x(t) = \{A \in \mu^{-1}(t) \mid A \subset \mathcal{T}_X(\{x\})\}$ (Teorema 6.1). Como, por el Teorema 6.1, $\mathfrak{G}_t = \{\mathcal{G}_x(t) \mid x \in X\}$ es una descomposición continua y monótona de $\mu^{-1}(t)$, resulta que g_t es continua. Sea $\sigma\colon 2^{2^X} \twoheadrightarrow 2^X$ la función dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$, la cual es continua [19, (1.48)].

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $t \in (0, t_0)$ tal que $\text{diám}(A) < \frac{\varepsilon}{3}$, para cada $A \in \mu^{-1}(t)$ [13, Lemma 6.3]. Como para toda $x \in X$, $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \text{diám}(\mathcal{G}_x(t)) = 0$ y cada $\mu^{-1}(t)$ es compacto, también supondremos que $\text{diám}(\mathcal{G}_x(t)) < \frac{\varepsilon}{3}$, para toda $\mathcal{G}_x(t) \in \mathfrak{G}_t$. Definimos $f_\varepsilon\colon \mathcal{F}_1(X) \to \mathcal{C}_1(X) \setminus \mathcal{F}_1(X)$ como:

$$f_\varepsilon(\{x\}) = \sigma \circ g_t(\{x\}) = \bigcup \mathcal{G}_x(t).$$

Observemos que f_ε está bien definida; i.e., $f_\varepsilon(\{x\}) \in \mathcal{C}_1(X)$ [19, (1.49)] y es no degenerado. Sea $A_x \in \mathcal{G}_x(t)$ tal que $x \in A_x$. Sea $y \in f_\varepsilon(\{x\})$. Entonces existe $A_y \in \mathcal{G}_x(t)$ tal que $y \in A_y$. Sean $z_x \in A_x$ y $z_y \in A_y$ tales que $d(A_x, A_y) = d(z_x, z_y)$. Notemos que $d(z_x, z_y) \leq \mathcal{H}(A_x, A_y)$ [19, (0.4)]. De aquí se sigue que $d(x, y) \leq d(x, z_x) + d(z_x, z_y) + d(z_y, y) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. En consecuencia, $\mathcal{H}(\{x\}, f_\varepsilon(\{x\})) < \varepsilon$. Por tanto, $\mathcal{F}_1(X)$ es un subconjunto Z de $\mathcal{C}_1(X)$ [15, 2.1].

Como $\mathcal{F}_1(X)$ es un subconjunto Z de $\mathcal{C}_1(X)$, resulta que $\mathcal{F}_n(X)$ es un subconjunto Z tanto de 2^X como de $\mathcal{C}_n(X)$ para cualquier número natural n [15, 2.2]. ☑

Teorema 6.3. *Si X es un continuo continuamente irreducible, que no es un arco, entonces $\mathcal{C}_1(X)$ es localmente una 2-celda en la cima.*

Demostración. Como X es continuamente irreducible, $\mathcal{T}_X$ es una función continua (Teorema 5.2). Sean $q\colon X \twoheadrightarrow [0,1]$ la función cociente dada por la descomposición monótona más fina en continuos densos en ninguna parte, y $\Im\colon 2^{[0,1]} \to 2^X$ la función dada por $\Im(B) = q^{-1}(B)$. Por [10, 1.8.24], $\Im$ es una función continua. Además, $2^q \circ \Im = 1_{2^{[0,1]}}$. En particular, $\Im\colon 2^{[0,1]} \twoheadrightarrow \Im\left(2^{[0,1]}\right)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema 4.7, se tiene que $\mathcal{T}_X\left(2^X\right) = \Im\left(2^{[0,1]}\right)$. De donde es fácil ver que $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X)) = \Im(\mathcal{C}_1(X))$, $\Im([0,1]) = X$ y que $\Im(\mathcal{F}_1([0,1])) = \{\mathcal{T}_X(\{x\}) \mid x \in X\}$. Es bien sabido que $\mathcal{C}_1([0,1])$ es una 2-celda [19, (0.54)]. Por tanto, $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X))$ es una 2-celda.

Consideremos una función de Whitney $\mu\colon \mathcal{C}_1(X) \twoheadrightarrow [0,1]$ [19, (0.50)]. Sea $t_0 = \max\{\mu\left(\mathcal{T}_X(\{x\})\right) \mid x \in X\}$. Observemos que $0 < t_0 < 1$ y que si $K \in \mu^{-1}([t_0,1])$ entonces $\mathcal{T}_X(K) = K$ (Corolario 5.6). Lo que implica que $\mu^{-1}([t_0,1]) \subset \mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X))$. En consecuencia, $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X))$ es una vecindad de X en $\mathcal{C}_1(X)$. Por tanto, $\mathcal{C}_1(X)$ es localmente una 2-celda en la cima. ☑

Teorema 6.4. *Si X es un continuo continuamente irreducible tal que para toda $x \in X$, $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es no degenerado, entonces existe una función de Whitney $\mu\colon \mathcal{C}_1(X) \twoheadrightarrow [0,1]$ tal que $\mu^{-1}(t)$ admite una descomposición continua en continuos tal que el espacio cociente es $[0,1]$.*

Demostración. Como para toda $x \in X$, $\mathcal{T}_X(\{x\})$ es no degenerado, dada $t_0 \in (0,1)$, por [23, Theorem 3.1], existe una función de Whitney $\mu\colon \mathcal{C}_1(X) \twoheadrightarrow [0,1]$ tal que $\mu(\mathcal{T}_X(\{x\})) = t_0$ para cada $x \in X$. Mostraremos que $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X)) = \mu^{-1}([t_0,1])$. Sea $A \in \mathcal{C}_1(X)$. Entonces para cada $a \in A$, $\mathcal{T}_X(\{a\}) \subset \mathcal{T}_X(A)$. Como μ es una función de Whitney, $\mathcal{T}_X(A) \geq 0$. De donde $\mathcal{T}_X(A) \in \mu^{-1}([t_0,1])$ y $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X)) \subset \mu^{-1}([t_0,1])$. Sea $K \in \mu^{-1}([t_0,1])$. Entonces, por el Teorema 5.6, $\mathcal{T}_X(K) = K$, lo que implica que $K \in \mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X))$. En consecuencia, $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X)) = \mu^{-1}([t_0,1])$.

Sea $q\colon X \twoheadrightarrow [0,1]$ la función cociente dada por la más fina descomposición continua y monótona de X. Como vimos en la demostración del Teorema 6.3, $\mathcal{T}_X(\mathcal{C}_1(X)) = \Im(\mathcal{C}_1([0,1])$ y, además, $\Im|_{\mathcal{C}_1([0,1])}$ es un homeomorfismo. Sea $\omega\colon \mathcal{C}_1([0,1]) \to [0,1]$ dada por $\omega(B) = \frac{\mu(\Im(B))-t_0}{1-t_0}$. Entonces ω es una función de Whitney para $\mathcal{C}_1([0,1])$. Por [19, (14.6)], $\omega^{-1}(s)$ es un arco para cada $s \in [0,1)$. Sea $t \in [t_0,1]$. Probaremos que $\mu^{-1}(t) = \Im\left(\omega^{-1}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right)\right)$. Para esto, sea $A \in \mu^{-1}(t)$. Entonces $\omega(\Im^{-1}(A)) = \frac{\mu(\Im(\Im^{-1}(A)))-t_0}{1-t_0} = \frac{\mu(A)-t_0}{1-t_0} = \frac{t-t_0}{1-t_0}$. De donde, $A \in \Im\left(\omega^{-1}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right)\right)$. Sea $K \in \Im\left(\omega^{-1}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right)\right)$. Entonces $\frac{t-t_0}{1-t_0} = \omega\left(\Im^{-1}(K)\right) = \frac{\mu(\Im(\Im^{-1}(K)))-t_0}{1-t_0} = \frac{\mu(K)-t_0}{1-t_0}$. Esto implica que $\mu(K) = t$. Así que, $K \in \mu^{-1}(t)$. De lo anterior se concluye que $\mu^{-1}(t) = \Im\left(\omega^{-1}\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right)\right)$. Por tanto, para cada $t \in [t_0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Si $t \in (0,t_0)$, se sigue del Teorema 6.1 que $\mu^{-1}(t)$ admite una descomposición continua en continuos cuyo espacio cociente es un arco. ☑

Agradecimiento. El autor fue apoyado parcialmente por DGAPA, UNAM. El autor agradece a The University of Birmingham por el apoyo recibido durante la preparación del presente artículo. El autor le agradece la cuidadosa lectura hecha por los árbitros. También agradece al profesor Javier Camargo sus valiosos comentarios hechos.

Referencias

[1] Davis H.S. "A note on connectedness im kleinen", *Proc. Amer. Math. Soc.* 19 (1968), 1237-1241.

[2] Eberhart C. and Nadler S.B. Jr., "Irreducible Whitney levels", *Houston J. Math.* 6 (1980), no. 3, 355-363.

[3] Fernández L. and Macías S., "The set functions $\mathcal{T}$ and $\mathcal{K}$ and irreducible continua", *Colloq. Math.* 121 (2010), no. 1, 79-91.

[4] Fitzgerald R.W., "Connected sets with a finite disconnection property", in *Studies in Topology*. Academic Press, (1975), 139-173.

[5] Grace E.E., "Monotone decompositions of θ-continua", *Trans. Amer. Math. Soc.* 275 (1983), no. 1, 287-295.

[6] Grace E.E. and Vought E.J., "Monotone decompositions of θ_n-continua", *Trans. Amer. Math. Soc.* 263 (1981), no. 1, 261-270.

[7] Grace E.E. and Vought E.J., "Quasimonotone mappings on θ_n-continua", *Topology Appl.* 17 (1984), no. 1, 55-62.

[8] Grace E.E. and Vought E.J., "Refinable maps and θ_n-continua", *Proc. Amer. Math. Soc.* 106 (1989), no. 1, 231-239.

[9] Heath J., "On n-ods", *Houston J. Math.* 9 (1983), no. 4, 477-487.

[10] Macías S., *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 275 (2005).

[11] Macías S., "Un Breve Panorama de los Hiperespacios de Continuos", *Rev. Integr. Temas Mat.* 23 (2005), no. 2, 1-13.

[12] Macías S., "A decomposition theorem for a class of continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous", *Colloq. Math.* 109 (2007), no. 1, 163-170.

[13] Macías S., "On continuously irreducible continua", *Topology Appl.* 156 (2009), no. 14, 2357-2363.

[14] Macías S., "On continuously type A' θ-continua", manuscrito.

[15] Macías S. and Nadler S.B. Jr., "Z-sets in hyperspaces", *Questions Answers Gen. Topology.* 19 (2001), no. 2, 227-241.

[16] Maćkowiak T., "Continuous mappings on continua", *Dissertationes Math.* (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1-95.

[17] Maćkowiak T., "Singular arc-like continua", *Dissertationes Math.* (Rozprawy Mat.) 257 (1986), 1-35.

[18] Mohler L. and Oversteegen L.G., "On the structure of tranches in continuously irreducible continua", *Colloq. Math.* 54 (1987), no. 1, 23-28.

[19] Nadler S.B. Jr., *Hyperspaces of sets: A text with research questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos # 33, 2006.

[20] Thomas E.S. Jr., "Monotone decompositons of irreducible continua", *Rozprawy Mat.* 50 (1966), 1-74.

[21] Vought E.J., "Monotone decompositions of continua not separated by any subcontinua", *Trans. Amer. Math. Soc.* 192 (1974), 67-78.

[22] Vought E.J., "Monotone decompositions of continua", in *General Topology and Modern Analysis* (ed. L. F. McAuley y M. M. Rao), Academic Press (1981), 105-113.

[23] Ward L.E., "Extending Whitney maps", *Pacific J. Math.* 93 (1981), no. 2, 465-469.